УДК 512.9

О. Головецька*, Л. Романюк, В. Чорний*
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
*Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Будемо розглядати питання існування і єдиності розв'язків рівняння

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t)) \ , \tag{1}$$

які задовольняють крайовим умовам третього роду

$$x(0) = x(p) \ , \ x'(0) = x'(p) \tag{2}$$

Нехай $x = (x_1, x_2, x_3 ... x_n), y = (y_1, y_2, y_3 ... y_n)$ — вектори з дійсними компонентами, $x \in R_n$. Норму вектора x позначимо $\|x\|$, так що $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \Lambda \ x_n^2}$.

Теорема 1

Нехай функція $f(t, x, x', x'')$ неперервна для (t, x, x', x'') задовольняє умову Ліпшиця відносно x, x', x''
$\|f(t, x_1, x_1', x_1'') - f(t, x_2, x_2', x_2'')\| \le K_0\|x_1 - x_2\| + K_1\|x_1' - x_2'\| + K_2\|x_1'' - x_2''\|$ зі сталими Ліпшиця $K_0, K_1, K_2 > 0$ і настільки малими, що $\frac{K_0 p^2}{16} + \frac{K_1 p}{4} + 2K_2 < 1$.

Тоді рівняння

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t)) - \frac{1}{p}\int_0^p f(s, x(s), x'(s), x''(s))ds \tag{3}$$

має єдиний розв'язок, який задовольняє крайові умови (2).

Зауваження 1 У випадку коли $\Delta(0) = \frac{1}{p}\int_0^p f(s, x(s), x'(s), x''(s))ds = 0$, то попередня теорема міститиме достатні умови існування і єдиності крайової задачі (1), (2).

Теорема 2

Нехай функція $f(t, x, y, z)$ неперервна, обмежена $\|f(t, x, y, z)\| \le m$, для $t \in [0; p]$ і всіх (x, y, z) і задовольняє умову Ліпшиця відносно z, тобто $\|f(t, x, y, z_1) - f(t, x, y, z_2)\| \le K\|z_1 - z_2\|$, де $0 < K < 1$, для $t \in [0; p]$ і всіх (x, y, z_i), $i = 1,2$.

Тоді задача (3), (2) має хоча б один розв'язок $x(t)$ і виконуються наступні нерівності: $\|x(t)\| \le \frac{mp^2}{16}$, $\|x'(t)\| \le \frac{mp}{4}$.